LOGARITMOS, EXPONENTES Y RADICALES
H. T. Arita, agosto 2005

Reglas generales para el uso de exponentes y radicales:

1. $x^a x^b = x^{(a+b)}$
   Ejemplo: $2^2 \cdot 2^3 = (2\times 2)(2\times 2\times 2) = 2^5 = 32$
2. $x^a / x^b = x^{(a-b)}$
   Ejemplo: $2^3 / 2^2 = (2\times 2\times 2)/(2\times 2) = 2^1 = 2$
3. $1/x^a = x^{-a}$
   Ejemplo: $1/2^3 = 2^{-3} = 1/8$
4. $(x^a)^b = x^{ab}$
   Ejemplo: $(2^3)^2 = (2\times 2\times 2)^2 = (2\times 2\times 2)\cdot(2\times 2\times 2) = 2^6 = 64$
5. $x^0 = 1$
   (Esta es una definición, más que una regla, pero puede derivarse de la regla 2 cuando a y b son iguales)
   Ejemplo: $2^3 / 2^3 = 2^{(3-3)} = 2^0 = 2/2 = 1$
6. $(xy)^a = x^a y^a$
   Ejemplo: $(2\times 3)^2 = 6^2 = 36 = 2^2 \times 3^2 = 4\times 9 = 36$
7. $(x/y)^a = x^a / y^a$
   Ejemplo: $(2/4)^2 = (1/2)^2 = 1/4 = 2^2 / 4^2 = 4/16 = 1/4$
8. $\sqrt[a]{x} = x^{1/a}$
   (Esta es una definición que permite usar las reglas de exponentes para los radicales).
9. $\sqrt[a]{x^b} = x^{b/a}$
   Ejemplo: $\sqrt[2]{2^4} = \sqrt[2]{16} = 4 = 2^{4/2} = 2^2 = 4$
10. $\sqrt[a]{x^a} = a$
    Ejemplo: $\sqrt[2]{3^2} = \sqrt[2]{9} = 3$
11. $\sqrt[a]{xy} = \sqrt[a]{x}\sqrt[a]{y}$
    Ejemplo: $\sqrt[2]{4\times 9} = \sqrt[2]{36} = 6 = \sqrt[2]{4}\times\sqrt[2]{9} = 2\times 3 = 6$
12. $\sqrt[a]{x/y} = \sqrt[a]{x} / \sqrt[a]{y}$
    Ejemplo: $\sqrt[2]{4/9} = \sqrt[2]{4} / \sqrt[2]{9} = 2/3$
13. $\sqrt[a]{x^b} = (\sqrt[a]{x})^b$
    Ejemplo: $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$
14. $\sqrt[b]{\sqrt[a]{x}} = \sqrt[ab]{x}$
    Ejemplo: $\sqrt[2]{\sqrt[2]{16}} = \sqrt[2]{4} = 2 = \sqrt[4]{16} = 2 =$

Definición de logaritmo:

Si $\beta^a = N$, donde $N > 0$ y $\beta > 0$, $\beta \neq 1$, entonces el exponente a se define como el logaritmo de N en base β: $a = \log_\beta(N)$. Por ejemplo:

- Dado que $10^3 = 1000$, el logaritmo base 10 de 1000 es 3 ($\log_{10}(1000) = 3$)
- El logaritmo base 2 de 8 es aquel exponente que hay que ponerle al número 2 para que nos de 8. Como 2^3 = 8, entonces 3 es el logaritmo en base 2 de 8 ($\log_2(8) = 3$)

Las expresiones $\beta^a = N$ y $\log_\beta(N) = a$ son equivalentes, la primera es la forma exponencial de expresar la relación y la segunda es la forma logarítmica. Nótese que para cualquier base de logaritmos: $\log(\beta^a) = \log(N)$, y $a \log \beta = \log(N)$; aplicando logaritmos base β, regresamos a la expresión $a = \log_\beta(N)$

Reglas generales para el uso de logaritmos:

Como los logaritmos son básicamente exponentes, las reglas que se aplican a éstos pueden emplearse de igual manera con los logaritmos:

1. $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
   Ejemplo: $\log_2(8 \times 4) = \log_2(32) = 5 = \log_2(8) + \log_2(4) = 3 + 2 = 5$
2. $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$
   Ejemplo: $\log_2(8/4) = \log_2(2) = 1 = \log_2(8) - \log_2(4) = 3 - 2 = 1$
3. $\log(1/a) = -\log(a)$
   Ejemplo: $\log_2(1/8) = -\log_2(8) = -3 = \log_2(1/2^3) = 0 - 3 = -3$
4. $\log(a^b) = b \log(a)$
   Ejemplo: $\log_2(4^2) = \log_2(16) = 4 = 2 \times \log_2(4) = 2 \times 2 = 4$
5. $\log(1) = 0$
   Esta es una definición aplicable a cualquier base de logaritmos, se puede deducir a partir de la regla 2:
   $\log_2(4/4) = \log_2(1) = \log_2(4) - \log_2(4) = 2 - 2 = 0$
6. $\log_\beta(\beta^a) = a$
   Ejemplos: $\log_2(2^3) = \log_2(8) = 3$; $\log_{10}(10^4) = \log_{10}(10000) = 4$
7. $\log(\sqrt[a]{x}) = \log(x)/a$
   Ejemplo: $\log_2(\sqrt[2]{64} = \log_2(64)/2 = 6/2 = 3 = \log_2(8)$

Otras reglas se pueden derivar simplemente aplicando las reglas para exponentes y radicales.